擒藻堂四庫全書薈要

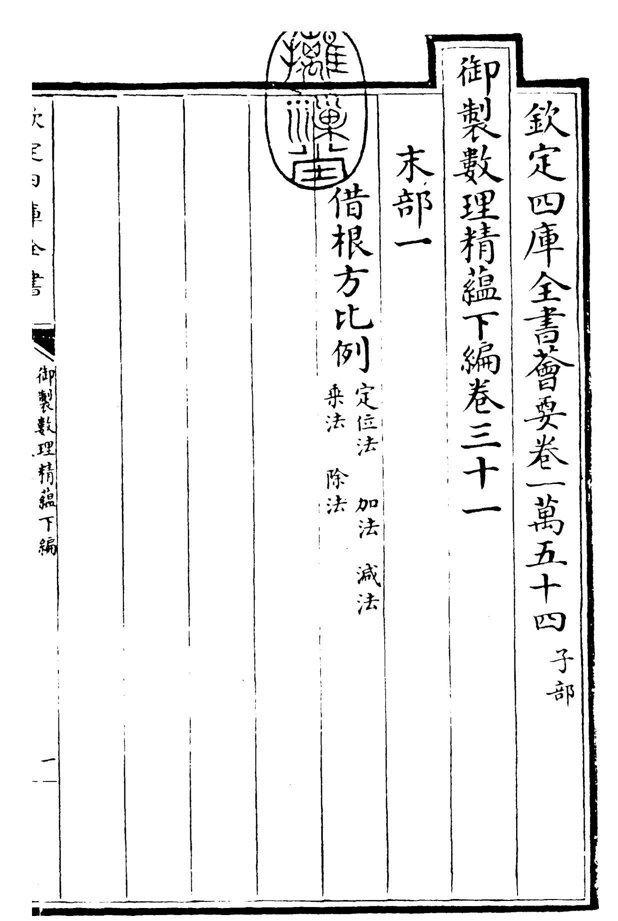
子部

欽定四庫全書薈要

子部

御製數理精蘊下編卷三十一

詳校官主事臣陳木



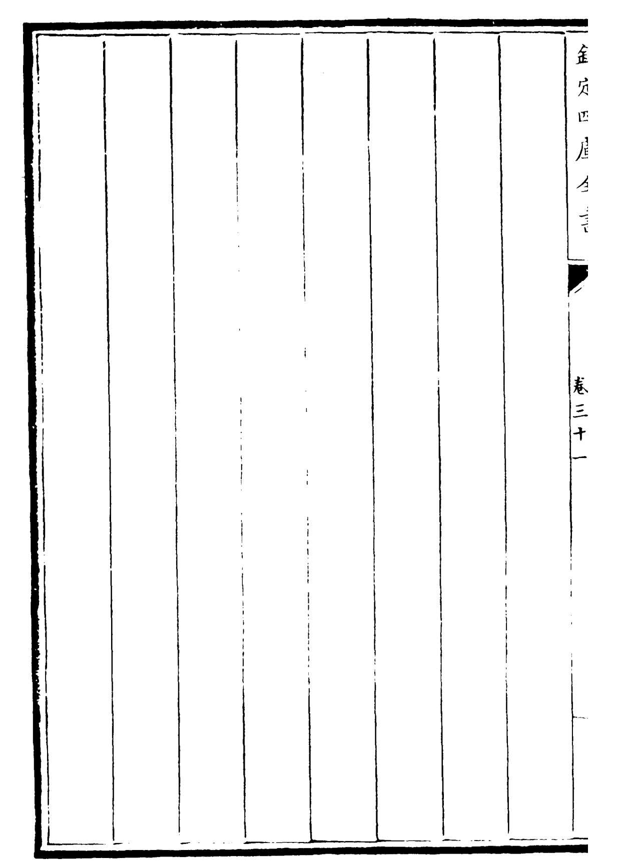
欽定四庫全書薈要卷一萬五十四 子部

御製數理精蘊下編卷三十一

末部一

借根方比例

定位法 加法 減法 乘法 除法



借根方比例

借根方者假借根數方數以求實數之法也凡法必借根借方加減乘除令與未知之數比例齊等而本數以出大意與借衰疊借略同然借衰疊借之法止可以御本部而此法則線面體諸部皆可御之其中有借根借方之不同益因根者方之邊數即所謂線以根自乘得平方以根自乘再乘得立方以根累次乘即得累次多乘方故以線類為問者則借根數以比之以面類為問者則借平方長方以比之以體類

為問者則借立方或累次多乘方以比之至於借數又有一定之位與降位之法定位降位法俱詳後要之此法設立虛數依所問之比例乘除加減務令根方之數與真數相當適等而所求之數以出此亦借數之巧也

定位法

衆數之經緯盡歸乘除而乘除之條理又取準於定位況借數一法又用根方諸名一經乘除俱變為幾根幾方之號而本數之比例由此而生其定位與常法稍異故變從簡易設表如左

定位表

前	真數	根	平方	立方	三乘方	四乘方	五乘方	六乘方	七乘方	八乘方	九乘方
後	○	一	二	三	四	五	六	七	八	九	一○

右表前行所列者借數之名後行所列者定數之位其借數者即比例也根與方數俱為相連比例率如根為二則平方為四立方為八以立方與平方之比同於平方與根數之比即為八與四之比同於四與二之比也然必借方借根者何也蓋以已知未知之數權約為幾根幾方以統御之加減後餘幾根幾方即知真數若干矣如根為二數其平方即為四若餘二平方即知其真數有八或餘二

根即知其真數有四也其定位者即視根方所對之位也乘法定位以兩數所對之位數相加其加數所對之方即乘出之方也除法定位以兩數所對之位數相減其減餘數所對之方即除出之方也乘法以真數乘根仍得根蓋根對一而真數對。無可加也如以根乘根即得平方蓋根對一一數與一一相加得二二所對之表為平方故定乘得之數為平方也如以根乘平方即得立方蓋根對一平方數對二一二相加得三而三所對之表為立方故定乘得之數為立方也又如以平方乘平方則二與二相加為四四所對之表得三乘方以平方乘立方則二與三相加為五五所對之表得四乘方以立方乘立方則三與三相加為六六所對之表得五乘方餘皆倣此除法以真數除根仍得根蓋根對一而真數對。無可減也如以根除根即得真數蓋根對

一一與一相減得。而。所對之表為真數故定除得之數為真數也如以根除平方即得根蓋根對一平方對二一二相減餘一而一所對之表為根故定除得之數為根數也又如以平方除平方則二與二減盡為。容所對之表得真數以平方除立方則二與三相減餘一容所對之表得根數以立方除立方則三與三相減得。容所對之表亦得真數也餘皆做此

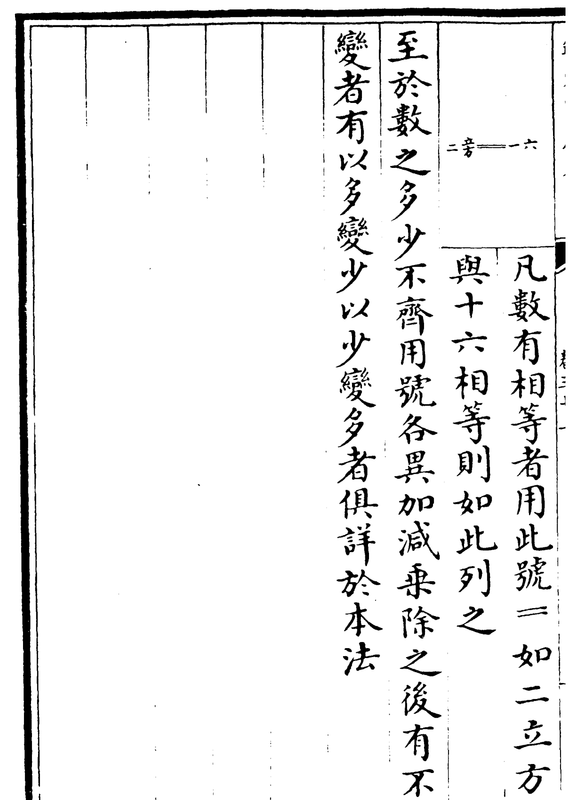
定多少與相同號式

凡數有多者用此號┴如一平方多二根則如此列之

一平方┴二根

凡數有少者用此號—如一立方少二平方則如此列之

一立方—二平方



凡數有相等者用此號＝如二立方與十六相等則如此列之

二立方＝一六

至於數之多少不齊用號各異加減乘除之後有不變者有以多變少以少變多者俱詳於本法

加法

凡多與多加得數仍為多少與少加得數仍為少多與少加少與多加則反相減為所得數而多數大則得數亦為多少數大則得數亦為少其故何也葢因多數大少數小以其所多補其所少而其所多者尚有餘也少數大多數小以其所多補其所少而其所少者仍不足也多少之號定而加法不淆矣

設如有三平方多四根與二平方多三根相加問得幾何

三平方	——	四根
二平方	——	三根
五平方	——	七根

一二	——	八
八	——	六
二〇	——	一四

法以三平方與二平方相加得五平方四根與三根相加得七根是為五平方多七根即所求之數也此多與多加得數仍為多也如以數明之以根為二則一平方為四上數三平方得十二多四根得多八是十二多八共二十下數二平方得八多三根得多六是八多六共十四上十二與下八相加得二十即五平方之數上多

八與下多六相加得十四即多七根之數蓋上數共二十下數共十四兩數相加得三十四即二十多十四也

設如有四立方少一平方與三立方少二平方相加問得幾何

四立方——一平方
三立方——二平方
————————
七立方——三平方

法以四立方與三立方相加得七立方一平方與二平方相加得三平方是為七立方少三平方即所求之數也此少與少加得數仍為少也如以數明之以

一〇八————九

八一————一八

一八九————二七

平方為九則一立方為二十七上數四立方得一百零八少一平方得少九是一百零八少九為九十九下數三立方得八十一少二平方得少十八是八十一少十八為六十三上一百零八與下八十一相加得一百八十九即七立方之數上少九與下少十八相加得二十七即少三平方之數蓋上數九十九下數六十三兩數相加得一百六十二即

設如有四平方多四根與二平方少三根相加問得幾何

一百八十九少二十七也

四平方——四根

二平方——三根

六平方——一根

法以四平方與二平方相加得六平方四根與三根相加應得七根今多少兩數不同故於多四根內反減去少三根餘一根因多數大故得數為多是為六平方多一根即所求之數也此多少兩數不同相加所多數大以其所多補足

四根——四平方
三根——二平方
一根——六平方

八——一六
六——八
二——二四

所少而所多仍有餘益以上數多四根補足下數少三根仍多一根也如以數明之以根為二則一平方為四上數四平方得十六多四根得多八是十六多八共二十四下數二平方得八少三根得少六是八少六為二上十六與下八相加得二十四即六平方之數上多八補足下少六仍餘二即多一根之數益上數二十四下數二兩數相加得二十

六即二十四多二也

設如有二立方少三平方與一立方多二平方相加問得幾何

三立方──二平方
二立方──一平方
三立方──一平方

法以二立方與一立方相加得三立方三平方與二平方相加應得五平方今多少兩數不同故於少三平方內反減去多二平方餘一平方因少數大故得數為少是為三立方少一平方即所求之數也此多少兩數不同相加所少數

三平方——二立方	二七——五四
二平方——一立方	一八——二七
一平方——三立方	九——八一

大以其所多補其所少而所少仍不足益於上數少三平方內增入下數多二平方仍少一平方也如以數明之以平方為九則一立方為二十七上數二立方得五十四少三平方得少二十七是五十四少二十七為二十七下數一立方得二十七多二平方得多十八是二十七多十八共四十五上五十四與下二十七相加得八十一即三立方之數

上少二十七內增入下多十八仍少九
即少一平方之數益上數二十七下數
四十五兩數相加得七十二即八十一
少九也

設如有二立方多三平方少四根與一立方多二平方
少三根相加問得幾何

法以二立方與一立方相加得三立方
三平方與二平方相加得五平方四根
與三根相加得七根是為三立方多五

二耆——三耆——四根

一耆——二耆——三根

三耆——五耆——七根

平方少七根即所求之數也此三位相加多少各自相同故多與多加仍為多少與少加仍為少也如以數明之以根為二則一平方為四一立方為八上數二立方得十六多三平方得多十二少四根得少八是十六多十二又少八為二十下數一立方得八多二平方得八少三根得少六是八多八又少六為十上十六與下八相加得二十四即三

一六┴一二──八

八┴八──六

二四┴二〇──一四

立方之數上多十二與下多八相加得二十即多五平方之數上少八與下少六相加得十四即少七根之數益上數二十下數十兩數相加得三十即二十四多二十又少十四也

設如有四立方多三平方少二根多五真數與五立方少一平方多三根少二真數相加問得幾何

法以四立方與五立方相加得九立方多三平方與少一平方相減餘二平方

四立方丄三平方——二根丄五真數

五立方——一平方丄三根——二真數

九立方丄二平方丄一根丄三真數

多數大故為多少二根與多三根相減餘一根多數大故為多多五真數與少二真數相減餘三真數多數大故為多是為九立方多二平方多一根多三真數即所求之數也此四位相加而多少各自不同須各以所多補足所少故相減所餘為所得數也如以數明之以根為二則一平方為四一立方為八上數四立方得三十二多三平方得多十二

五———四———一二———三二

二———六———四———四○

三———二———八———七二

少二根得少四又多真數五是三十二多十二少四又多五為四十五下數五立方得四十少一平方得少四多三根得多六又少真數二是四十少四多六又少二為四十上三十二與下四十相加得七十二即九立方之數上多十二補足下少四仍餘八即多二平方之數上少四增入下多六反多二即多一根之數上多五補足下少二仍餘三即多

三真數盋上數四十五下數四十兩數相加得八十五即七十二多八又多二又多三也

設如有一立方多三根與一平方少一根相加問得幾何

一立方　○平方┴三根

　　　　一平方—一根

一立方┴一平方┴二根

法以一立方與一平方相加得一立方多一平方多三根與少一根相減餘二根多數大故為多是為一立方多一平方多二根即所求之數也此相加兩數

二七　○—┴—九

九——三

二七—┴—九—┴—六

位分不同須各按位列號補足位分始不相淆今上層無平方位而下層却有平方位故上層列一空平方位以補之凡法皆當如此也如以數明之以根為三則一平方為九一立方為二十七上數一立方得二十七多三根得多九是二十七多九共三十六下數一平方得九少一根得少三是九少三為六上二十七與下無可加仍得二十七即一立

九┴○　　七二
三——九
六┴九┴七二

方之數下九與上空位亦無可加仍得九即一平方之數上多九補足下少三仍餘六即多二根之數益上數三十六下數六兩數相加得四十二即二十七多九又多六也

減法

凡多與多減原數大於減數則減餘仍為多少與少減原數大於減數則減餘仍為少若多與多減減數大於原數則反減而減餘即變為少盖減數之所多既大於原數之所多則原數之所多內減盡與原數之所多相等之數仍須於原數之整分內多減去所大之幾何則所餘之整分內即少幾何矣若少與少減減數大於原數則反減而減餘即變為多盖減數之所少既大於原數之所少則原數之所少內減盡

與原數之所少相等之數仍須於原數之整分內少減所大之幾何故所餘之整分內即多幾何矣至於多與少減少與多減則反相加為減餘數而原數多則減餘仍為多原數少則減餘仍為少其故何也蓋因原數多減數少則原數已多在彼而減數又少於此是所餘益多也原數少減數多則原數已少在彼而減數又多於此是所餘益少也多少之號明而減法不淆矣

設如有四平方多五根內減二平方多二根問所餘

五根	四平方	一五	三六
二根	二平方	六	一八
三根	二平方	九	一八

法以四平方減二平方餘二平方五根減二根餘三根是為二平方多三根即所求之數也此多與多減原數大於減數故減餘仍為多也如以數明之以根為三則一平方為九上數四平方得三十六多五根得多十五是三十六多十五共五十一下數二平方得十八多二根得多六是十八多六共二十四上三

一五 ———— 三六

六 ———— 一八

————————

九 ———— 一八

十六内減下十八餘十八即二平方之數上十五内減下六餘九即三根之數蓋上數共五十一下數共二十四兩數相減餘二十七即十八多九也

設如有四立方少三平方内減三立方少二平方問所餘幾何

三平方 ———— 四立方

二平方 ———— 三立方

————————

一平方 ———— 一立方

法以四立方減三立方餘一立方三平方減二平方餘一平方是為一立方少一平方即所求之數也此少與少減原

一〇八——二七

八一——一八

二七——九

數大於減數故減餘仍為少也如以數明之以平方為九則一立方為二十七上數四立方得一百零八少三平方得少二十七是一百零八少二十七為八十一下數三立方得八十一少二平方得少十八是八十一少十八為六十三上一百零八內減下八十一餘二十七即一立方之數上二十七內減下十八餘九即少一平方之數蓋上數八十一

下數六十三兩數相減餘十八即二十七少九也

設如有七平方多三根內減四平方多五根問所餘幾何

七冪——三根

四冪——五根

三冪——二根

法以七平方減四平方餘三平方三根內不能減五根乃於下數多五根內反減上數多三根餘二根即變為少是為三平方少二根即所求之數也此多與多減減數大於原數故反減而減餘即

六三———九

三六———五

二七———六

變為少益原數多三根減數多五根是減數比原數大二根如於原數三根內減去減數三根則減數仍餘二根此二根必須於原數平方內減之原數既多減二根則餘數即少二根也如以數明之以根為三則一平方為九上數七平方得六十三多三根得多九是六十三多九共七十二下數四平方得三十六多五根得多十五是三十六多十五共

五十一上六十三内減下三十六餘二十七即三平方之數下十五内反減上九餘六即少二根之數益上數共七十二下數共五十一兩數相減餘二十一即二十七少六也

九 ———— 三六
五 ———— 六三
六 ———— 七二

設如有六平方少三根内減二平方少四根問所餘幾何

法以六平方減二平方餘四平方三根内不能減四根乃於下數少四根内反

六平方——三根

二平方——四根

四平方——一根

減上數少三根餘一根即變為多是為四平方多一根即所求之數也此少與少減減數大於原數故反減而減餘即變為多益原數少三根減數少四根是減數比原數大一根如於原數三根内減去減數三根則減數仍餘一根此一根係原數平方内所少減之一根原數既少減一根則餘數即多一根也如以數明之以根為四則一平方為十六上

九六 —— 一二

三二 —— 一六

六四 —— 四

數六平方得九十六少三根得少十二是九十六少十二為八十四下數二平方得三十二少四根得少十六是三十二少十六為十六上九十六內減下三十二餘六十四即四平方之數下十六反減上十二餘四即多一根之數蓋上數八十四下數十六兩數相減餘六十八即六十四多四也

設如有三平方多四根內減二平方少一根問所餘幾

何

三平方 —— 四根
二平方 —— 一根
一平方 —— 五根

法以三平方減二平方餘一平方四根減一根應餘三根今多少兩數不同故反相加得五根因原數多故得數仍為多是為一平方多五根即所求之數也此多少兩數不同相減原數多減數少原數已多而減數又少則所餘者愈多蓋原數多四根減數少一根是原數比減數已多五根故減餘即為多五根也

四八————一六

三二————四

一六————二〇

如以數明之以根為四則一平方為十六上數三平方得四十八多四根得多十六是四十八多十六共六十四下數二平方得三十二少一根得少四是三十二少四為二十八上四十八內減下三十二餘十六即一平方之數上多十六加下少四得二十即多五根之數益上數六十四下數二十八兩數相減餘三十六即十六多二十也

設如有五平方少二根内減三平方多三根問所餘幾何

五帶二根
三帶三根
二帶五根

法以五平方減三平方餘二平方二根不能減三根且多少兩數不同故反相加得五根因原數少故得數仍為少是為二平方少五根即所求之數也此多少兩數不同相減原數少減數多原數已少減數又多則所餘者愈少蓋原數少二根減數多三根是原數比減數已

五平方——二根
三平方——三根
二平方——五根

一二五——○
七五——一五
五○——二五

少五根故減餘即為少五根也如以數明之以根為五則一平方為二十五上數五平方得一百二十五少二根得少十是一百二十五少十為一百一十五下數三平方得七十五多三根得多十五是七十五多十五共九十上一百二十五内減下七十五餘五十即二平方之數上少十加下多十五得二十五即少五根之數益上數一百一十五下數

九十兩數相減餘二十五即五十少二十五也

設如有四立方多六平方內減二立方多三平方多三根問所餘幾何

四立方丄六平方 ○

二立方丄三平方丄三根

二立方丄三平方—三根

法以四立方減二立方餘二立方六平方減三平方再減三根餘三平方少三根是為二立方多三平方少三根即所求之數也此相減兩數位分不同須各按位列號補足位分始不相淆令上層

四立方 ⊥ 六平方　○

二立方 ⊥ 三平方 ⊤ 三根

二立方 ⊥ 三平方 —— [illegible]根

無根位而下層却有根位故上層作一空根位以補之是原根位無數而減數多三根故所餘即少三根也如以數明之以根為二則一平方為四一立方為八上數四立方得三十二多六平方得多二十四是三十二多二十四共五十六下數二立方得十六多三平方得多十二多三根得多六是十六多十二又多六為三十四上三十二內減下十六

餘十六即二立方之數上二十四內減下十二即三平方之數下六無可減仍為六即少三根之數蓋上數五十六下數三十四兩數相減餘二十二即十六多十二又少六也

三二丄二四　○

一六丄一二丄六

一六丄一二—六

設如有五立方多四平方多三根少八真數內減四立方多二平方多二根少九真數問所餘幾何

法以五立方減四立方餘一立方四平方減二平方餘二平方多與多減原數

五立方－四平方丄三根－八真數

四立方丄二平方丄二根－九真數

一立方丄二平方丄一根丄一真數

大故為多多三根減二根餘一根多與多減原數大故為多八真數不能減九真數乃於下數少九內反減上數少八餘一即變為多是為一立方多二平方多一根多一真數即所求之數也如以數明之以根為三則一平方為九一立方為二十七上數五立方得一百三十五多四平方得多三十六多三根得多九又少真數八是一百三十五多三十

一三五丄三六丄九—八

一〇八丄一八丄六丄九

二七丄一八丄三丄一

六又多九又少八為一百七十二下數四立方得一百零八多二平方得多十八多二根得多六又少真數九是一百零八多十八又多六又少九為一百二十三上一百三十五內減下一百零八餘二十七即一立方之數上三十六內減下十八餘十八即多二平方之數上九內減下六餘三即多一根之數下九反減上八餘一即多一真數蓋上數一

百七十二下數一百二十三兩數相減餘四十九即二十七多十八又多三又多一也

設如有二立方多三根內減一平方少一根問所餘幾何

三根 —— ○平方 —— 二立方

一根 —— 一平方

四根 —— 一平方 —— 二立方

法以二立方減一平方餘二立方少一平方三根減一根應餘二根今多少兩數不同故反相加得四根因原數多故得數仍為多是為二立方少一平方多

九┴──○　　四五

三───九

二一┴──九──四五

四根即所求之數也如以數明之以根為三則一平方為九一立方為二十七上數二立方得五十四多三根得多九是五十四多九共六十三下數一平方得九少一根得少三是九少三為六上五十四無可減仍為五十四即二立方之數下九無可減仍為九即少一平方之數上多九與下少三相加得十二即多四根之數蓋上數六十三下數六兩

數相減餘五十七即五十四少九又多十二也

乘法

凡乘法各按位分上下横列自末位起逐位遍乘與常法同其書乘出之數以類相從如乘出之數為根俱書於根之下乘出之數為平方俱書於平方之下皆依定位表例其定多少之號則臨期互有轉移蓋法實俱止一位者其乘出之數為多不必言矣法實不止一位俱係多者如幾平方多幾根或幾根多幾真數又或幾平方多幾根又多幾真數之類其乘出之數亦俱為多蓋以多乘多則多者益多也法實兩數俱係少者其為首一位已係整數為多如幾平方少幾根或幾根少幾真數或幾平方少幾根又少幾真數之類

故乘出之數則有多少之分如為首一位相乘係多與多乘其乘出之數為多而次位為少者與首位乘是為少與多乘或首位與次位為少者乘是為多與少乘則其乘出之數俱為少益少與多乘多與少乘則少者益少而得數固少也（如幾平方少幾根與幾真數相乘以真數乘平方即為多與多乘以真數乘根即為多與少乘也）至於少與少乘其乘出之數反變為多（如幾立方少幾平方與幾根少幾真數相乘以真數乘平方即為少與少乘也）其故何也葢法實首位為多次位以後為少則乘出之數首位內少次位之數必多末位之數須於乘出

首位數中減去次位之數加入末位之數始與實數相合除首位上下兩整數相乘以後次位皆係少與多與少乘則此兩數俱為少合之為首位數內少次位之數而多末位之數益因次位之為首位數內有兩分一末位之數首位數內減去次位之全數即如多減去一末位之數尚能於次位數中先減去末位數然後再於首位數中減之始與實數相合今次位數中既不能先減去末位數故轉於首位數中減去次位數反加入一所謂減者即少數所謂加者即多數多少末位數也之分既定則依加法相加即為所得之數也

設如有三根多二真數以三真數乘之問得幾何

法以三真數乘二真數得多六真數以多

真數 二 —— 三根

真數 三

真數 六 —— 九根

二 —— 一二

三

六 —— 三六

與多乘故為多也又凡以真數乘根方之數其位皆不變如以真數乘真數仍得真數以真數乘根仍得根根益定位表中真數之位為○於根方之位無所加也以三真數乘三根得多九根是為九根多六真數即所求之數也如以數明之以根為四則上數三根得十二多二真數共得十四以下真數三乘之所得三十六即九根之數所得多六即多六真數益以下數三與上數十四相乘得四十二即三十六多六也

設如有四根多二真數以二根多三真數乘之問得幾何

四根———二真數
二根———三真數
一二根———六真數
八平方———四根
八平方———六根———六真數

法以多三真數乘多二真數得多六真數以多三真數乘四根得多十二根又以二根乘多二真數得多四根以二根乘四根得八平方（以根與根乘即得平方蓋根所對之位為一以一加一為二即平方所對之位故得數定為平方）相加得八平方多一十六根又多六真數即所求之數也如圖甲乙為四根乙丙為多二

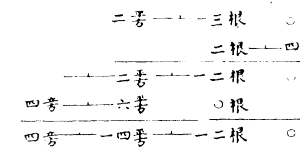
真數甲丁為二根丁戊為多三真數以甲丙四根多二真數與甲戊二根多三真數相乘成甲戊己丙長方形其甲丁庚乙長方形即八平方其乙庚辛丙與丁戊壬庚二長方形即所多十六根其庚壬己辛長方形即所多六真數也如以數明之以根為四則一平方為十六上數四根得十六多二真數共得十八下數二根得八多三真數共得十一相

一六　丄　二
八　丄　三
四八　丄　六
一二八　丄　六
一二八　丄　六四　丄　六

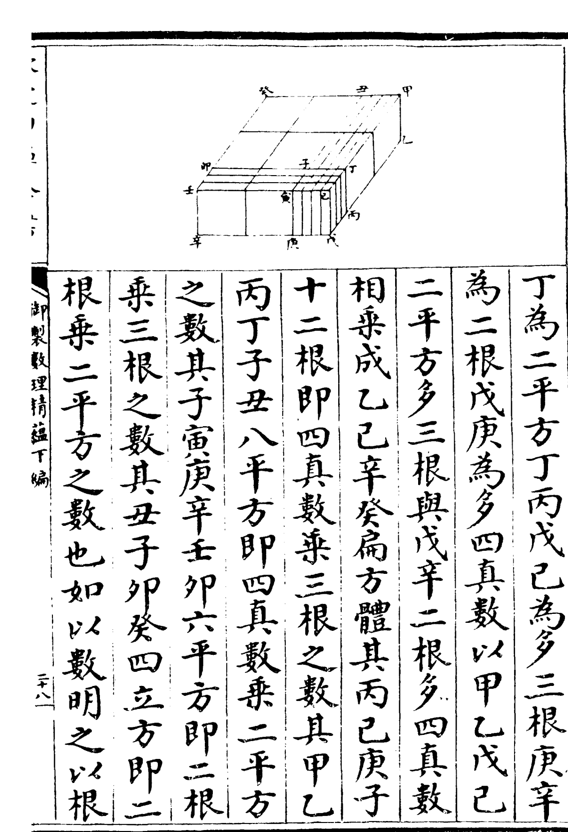
乘所得一百二十八即八平方之數所得多六十四即多十六根之數所得多六即多六真數益以下數十一與上數十八相乘得一百九十八即一百二十八多六十四又多六也

設如有二平方多三根以二根多四真數乘之問得幾何

法因上層無真數位故列一空位以補之以多四真數乘空真數仍為空以多



四真數乘多三根得多十二根以多四真數乘二平方得多八平方以二根乘空真數仍為空以二根乘多三根得多六平方以二根乘二平方得四立方以根乘平方即得立方蓋根所對之位為一平方所對之位為二以一加二得三即立方所對之位也相加得四立方多十四平方又多十二根即所求之數也此相乘兩數位分不同須各按位列號補足位分始不相淆凡法皆當如此如圖甲乙丙



丁為二平方丁丙戊己為多三根庚辛為二根戊庚為多四真數以甲乙戊己二平方多三根與戊辛二根多四真數相乘成乙己辛癸扁方體其丙己庚子十二根即四真數乘三根之數其甲乙丙丁子丑八平方即四真數乘二平方之數其子寅庚辛壬卯六平方即二根乘三根之數其丑子卯癸四立方即二根乘二平方之數也如以數明之以根

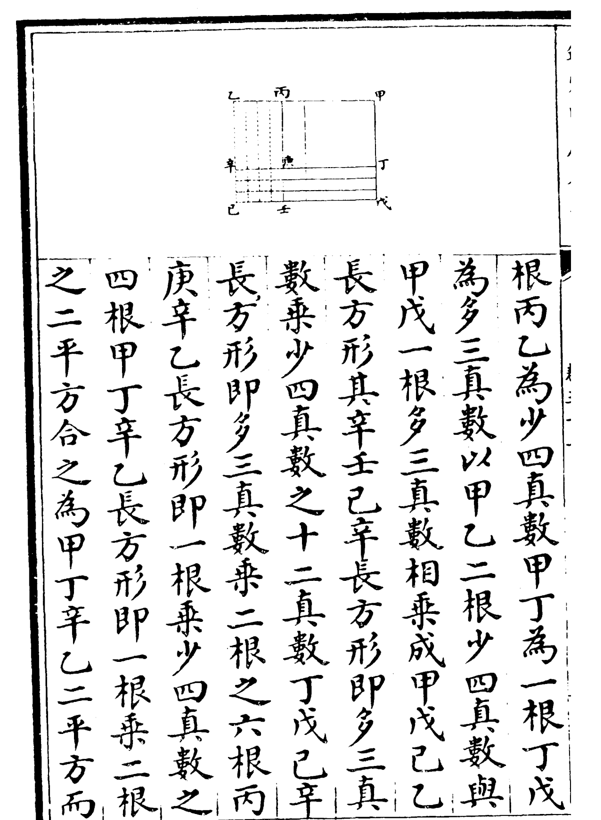
五〇——一五　〇
一〇——四
——二〇〇——六〇　〇
五〇〇——一五〇　〇
五〇〇——三五〇——六〇　〇

為五則一平方為二十五一立方為一百二十五上數二平方得五十多三根得多十五共得六十五下數二根得一十多四真數共得十四相乘所得五百即四立方之數所得多三百五十即多十四平方之數所得多六十即多十二根之數蓋以下數十四與上數六十五相乘得九百一十即五百多三百五十又多六十也

設如有二根少四真數以一根多三真數乘之問得幾何

二根——————四真數
一根——————三真數
六根——————十二真數
二平方——————四根
二平方——————二根——————十二真數

法以多三真數乘少四真數得少十二真數（多與少乘故為少）多六根（凡為首一位皆為多而數前無號者亦即為多今以多三真數與多二根相乘故其得數仍為多）又以一根乘少四真數得少四根（以多與少乘故為少）以一根乘二根得二平方相加得二平方多二根少十二真數即所求之數也如圖甲乙為二



根丙乙為少四真數甲丁為一根丁戊為多三真數以甲乙二根少四真數與甲戊一根多三真數相乘成甲戊己乙長方形其辛壬己辛長方形即多三真數乘少四真數之十二真數丁戊己辛長方形即多三真數乘二根之六根丙庚辛乙長方形即一根乘少四真數之四根甲丁辛乙長方形即一根乘二根之二平方合之為甲丁辛乙二平方而

一二 ———— 四
六 ———— 三
———— 三六 ———— 一二
七二 ———— 二四
七二 ———— 一二 ———— 一二

少丙庚辛乙之四根又多丁戊己辛之六根而少庚壬己辛之十二真數今以丁戊己辛之多六根少十二真數補丙庚辛乙之少四根仍多二根而少十二真數也如以數明之以根為六則一平方為三十六上數二根得十二少四真數則餘八下數一根得六多三真數共得九相乘所得七十二即二平方之數所得多十二即多二根之數所得少十

二即少十二真數之數益以下數九與上數八相乘得七十二即七十二多十二又少十二也

設如有一根少一真數以一根少二真數乘之問得幾何

一根———一真數
一根———二真數
二根———二真數
一平方———一根
一平方———三根———二真數

法以少二真數乘少一真數得多二真數（少與少乘故為多）以少二真數乘一根得少二根（一根為首且無號故為多今以少二真數與多一根相乘故其得數亦為少也）又以一根乘少一真數得少一根

多與少乘以一根乘一根得一平方相
故為少
加得一平方少三根多二真數即所求
之數也如圖甲乙為一根丙乙為少一
真數甲丁亦為一根戊丁為少二真數
以甲乙一根少一真數與甲丁一根少
二真數相乘成甲乙己丁正方形其庚
壬己辛小長方形即少二真數乘少一
真數之二真數其戊壬己丁即二真數
乘一根之二根其丙乙己辛即一根乘

丁 戊 甲
辛 癸 丙
己 壬 乙

少一真數之一根其甲乙己丁為一根乘一根之一平方合之為甲乙己丁一平方而少丙乙己辛之一根又少戊壬己丁之二根而多庚壬己辛之二真數實得甲丙庚戊之一長方形益甲乙己丁之一正方內減戊壬己丁之二根又減丙乙己辛之一根是重減去庚壬己辛之二真數則甲丙庚戊長方內必缺二真數故將少二真數乘少一真數所

六——一
六——二
————
——一二┴——二
三六——六
————
三六——一八┴——二

得之二真數即預定為多號以補重減之分然後得甲丙庚戊之一長方為所得之實數也是則少與少乘之為多者非於整數之外有盈分而為多實因所少之數有過分而為多也如以數明之以根為六則一平方為三十六上數一根為六少一真數則餘五下數一根為六少二真數則餘四相乘所得三十六即一平方之數所得少十八即少三根

之數所得多二即多二真數之數益以下數四與上數五相乘得二十即三十六少十八多二也

設如有二立方少二平方少一根以二平方少二根乘之問得幾何

法因上下兩層皆無真數位故各列一空位以補之以空真數乘上層各位仍得各空位以少二根乘空真數仍得空根以少二根乘少一根得多二平方以

四乘方	三乘方	立方	平方	根	真數
		二立方	二平方	一根	○真數
			二平方	二根	○真數
		○立方	○平方	○根	○真數
	四三乘方	四立方	二平方	○根	
四四乘方	四三乘方	二立方	○平方		
四四乘方	八三乘方	二立方	○平方	○根	○真數

少二根乘少二平方得多四立方以少二根乘二立方得少四三乘方又以二平方乘空真數仍得空平方以二平方乘少一根得少二立方以二平方乘少二平方得少四三乘方以二平方乘二立方得四四乘方相加共得四四乘方少八三乘方多二立方又多二平方即所求之數也如以數明之以根為三則一平方為九一立方為二十七一三乘

五四——一八——三

一八——六

——三二四——○八——一八

九七二——三二四——五四

九七二——六四八——五四——一八

方為八十一一四乘方為二百四十三上數二立方得五十四少二平方得少十八少一根得少三是五十四少十八又少三為三十三下數二平方得十八少二根得少六是十八少六為十二相乘所得九百七十二即四四乘方之數所得少六百四十八即少八三乘方之數所得多五十四即多二立方之數所得多十八即多二平方之數益以下數

十二與上數三十三相乘得三百九十六即九百七十二內少六百四十八又多五十四復多十八也

設如有三平方少二根多二真數與一平方多二根少三真數相乘問得幾何

法以少三真數乘多二真數得少六真數以少三真數乘少二根得多六根以少三真數乘三平方得少九平方又以多二根乘多二真數得多四根以多二

		三平方	二根	二真數
		一平方	二根	三真數
		九平方	六根	六真數
	六立方	四平方	四根	
三一乘	二立方	二平方		
三三乘	四立方	一平方	〇根	六真數

根乘少二根得少四平方以多二根乘三平方得多六立方又以一平方乘多二真數得多二平方以一平方乘少二根得少二立方以一平方乘三平方得三三乘方相加得三三乘方多四立方少十一平方多十根少六真數即所求之數也如以數明之以根為四則一平方為十六一立方為六十四一三乘方為二百五十六上數三平方得四十八

```
          四八────  八─┴─二
          一六──┴──  八───三
          ──────────────────
      ────四四─┴─二四───六
 ─┴──三八四────六四─┴──六
七六八───一二八──┴──三二
────────────────────────
七六八─┴─二五六────七六─┴─四〇───六
```

少二根得少八多二真數共得四十二下數一平方得十六多二根得多八少三真數共得二十一相乘所得七百六十八即三三乘方之數所得多二百五十六即多四立方之數所得少一百七十六即少十一平方之數所得多四十即多十根之數所得少六即少六真數之數蓋以下數二十一與上數四十二相乘得八百八十二即七百六十八多

二百五十六又少一百七十六仍多四十復少六也

除法

凡除法按位列數必以真數為單位法尾未至真數者須補○以存其位如法尾為根則補一○以存真數位法尾為平方則補二○以存真數位法尾為立方則補三○以存真數位將得數首位紀於真數之上如真數之位為○者則紀於○位之上真數所對實中之位即得數首位之數如真數對實中根位即定得數首位為根如真數對實中平方位即定得數首位為平方如真數對實中立方位即定得數首位為立方餘俱做此其歸除遞減皆與常法同至於定號亦與乘法同俱詳設如於左

設如有十二立方多九平方多六根以三真數除之問

得幾何

得數　四立方　三平方　二根
法　三真數
實　十二立方　九平方　六根
十二立方
○　○　九平方
九平方
○　六根
六根
○

法以三真數除十二立方得四立方以四立方乘三真數得十二立方與實相減恰盡餘多九平方多六根復以三真數除多九平方得多三平方以多三平方乘三真數得多九平方與實相減恰盡餘多六根又以三真數除多六根得多二根以多二根乘三真數得多六根與實相減恰盡無餘是為四立方多三

```
得數 一〇八——二七——六
法　 三
實　 三二四——八一——一八
　　 三二四
　　 〇〇〇——八一
　　　　　——八一
　　　　　　〇〇——一八
　　　　　　　　——一八
　　　　　　　　　〇〇
```

平方多二根即所求之數也此法蓋因真數除立方多平方與多根故得數之位仍從實數之位且真數之位下對實中立方之位故定得數首位亦為立方又因實數皆為多故得數亦皆為多也如以數明之以根為三則一平方為九一立方為二十七實數十二立方得三百二十四多九平方得多八十一多六根得多十八是三百二十四多八十一

又多十八共為四百二十三以真數三除之所得一百零八即四立方之數所得多二十七即多三平方之數所得多六即多二根之數益以四百二十三以三除之得一百四十一即一百零八多二十七又多六也

得 一〇八　二七　六
法 三
實 三二四　八一　一八
三二四
〇〇〇　八一
八一
〇〇　一八
一八
〇〇

設如有十二立方多八平方多六根以二根除之問得幾何

法因法尾末至真數位故設一空真數

得數 六平方—丄—四根—丄—三真數
法 二根 ○立方
實 一二立方—丄—八平方—丄—六根 ○真數
一二立方 ○平方
○ ○ —丄—八平方—丄—六根
—丄—八平方 ○根
○ —丄—六根 ○真數
—丄—六根 ○真數
○ ○

位以補之以二根除十二立方得六平方以六平方乘二根得十二立方與實相減恰盡餘多八平方多六根復以二根除多八平方得多四根以多四根乘二根得多八平方與實相減恰盡餘多六根復以二根除多六根得多三真數以多三真數乘二根得多六根與實相減恰盡無餘是為六平方多四根多三真數即所求之數也此法蓋因根數除

立方多平方與多根故根除立方得平方根除多平方得多根根除多根而得多真數且真數之位下對實中平方之位故定得數首位亦為平方又因實數皆為多故得數亦皆為多也如以數明之以根為二則一平方為四一立方為八實數十二立方得九十六多八平方得多三十二多六根得多十二是九十六多三十二又多十二共為一百四十

設 二四一八一三
法 四 〇
實 九六一三二一一二 〇
九六 〇
〇〇一三二一一二
一三二 〇
〇〇一一二 〇
一一二 〇
〇〇 〇

法數二根為四除之所得二十四即六平方之數所得多八即多四根之數所得多三即多三真數之數蓋一百四十以四除之得三十五即二十四多八又多三也

設如有四三乘方多八立方又多八平方以四平方除之問得幾何

法以四平方除四三乘方得一平方以一平方乘四平方得四三乘方與實相

得數 一平方——二根——二真數

法 四平方 ○根 ○真數
實 四三乘方——八立方——八平方 ○根 ○真數
四三乘方 ○立方 ○立方
○——八立方——八平方 ○根
——八立方 ○平方 ○根
○——八平方 ○根 ○真數
——八平方 ○根 ○真數
○ ○ ○

減恰盡餘多八立方多八平方復以四平方除多八立方得多二根以多二根乘四平方得多八立方與實相減恰盡餘多八平方又以四平方除多八平方得多二真數以多二真數乘四平方得多八平方與實相減恰盡無餘是為一平方多二根又多二真數即所求之數也此法葢因平方除三乘方多立方與多平方故平方除三乘方得平方平方

得數 九一六一二
法 三六 ○ ○
實 三二四一二一六一七二 ○ ○
三二四 ○ ○
○○○一二一六一七二 ○
一二一六 ○ ○
○○○一七二 ○ ○
一七二 ○ ○
○○ ○ ○

除多立方得多根平方除多平方得多真數且真數之位下對實中平方之位故定得數首位亦為平方又因實數皆為多故得數亦皆為多也如以數明之以根為三則一平方為九一立方為二十七一三乘方為八十一實數四三乘方得三百二十四多八立方得多二百一十六多八平方得多七十二是三百二十四多二百一十六又多七十二共

為六百一十二法數四平方為三十六除之所得之九即一平方之數所得多六即多二根之數所得多二即多二真數之數蓋六百一十二以三十六除之得十七即九多六又多二也

設如有四立方多八平方多七根多二真數以二平方多三根多二真數除之問得幾何

法以二平方多三根多二真數除四立方多八平方多七根得二根以二根乘

二根 ┴ 真數

法 二平方 ┴ 三根 ┴ 二真數

實 四立方 ┴ 八平方 ┴ 七根 ┴ 二真數

四立方 ┴ 六平方 ┴ 四根

○ ┴ 二平方 ┴ 三根 ┴ 二真數

┴ 二平方 ┴ 三根 ┴ 二真數

○ ○ ○

多二真數得多四根以二根乘多三根得多六平方以二根乘二平方得四立方與實相減餘多二平方多三根多二真數復以二平方多三根多二真數除二平方多三根多二真數得多一真數以多一真數乘多二真數得多二真數以多一真數乘多三根得多三根以多一真數乘二平方得多二平方與實相減恰盡無餘是為二根多一真數即所

		得數二根 ——	真數
法二平方 ——	三根 ——	二真數	
實四立方 ——	八平方 ——	七根	二真數
四立方 ——	六平方 ——	四根	
○ ——	二平方 ——	三根 ——	二真數
——	二平方 ——	三根 ——	二真數
	○	○	○

求之數也此法益因平方多根多真數除立方多平方多根多真數故以平方除立方得根以平方除多平方得多真數且真數之位下對實中根位故定得數首位為根又因實數皆為多故得數亦皆為多也如以數明之以根為三則一平方為九一立方為二十七實數四立方得一百零八多八平方得多七十二多七根得多二十一多二真數即多

得數 六——一

法 八——九——二

實 一〇八——七二——一——二

一〇八——五四——一二

〇〇〇——一八——〇九——二

——一八——九——二

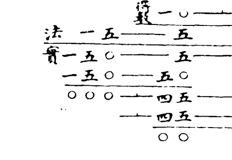
〇〇 〇 〇

二是為一百零八多七十二又多二十一又多二共為二百零三法數二平方得十八多三根得多九多二真數即多二是為十八多九又多二共為二十九除之所得之六即二根之數所得多一即多一真數益二百零三以二十九除之得七即六多一也

設如有六平方少一根少十五真數以三根少五真數除之問得幾何

得數　二根——三真數
法　三根——五真數
實　六平方——一根——一五真數
　　六平方——○根
　　○——九根——一五真數
　　——九根——一五真數
　　　　○　　　○○

法以三根少五真數除六平方少一根得二根以二根乘少五真數得少十根以二根乘三根得六平方與實相減平方恰盡根之減數大於原數轉減之餘多九根少十五真數復以三根少五真數除多九根少十五真數得多三真數減餘之九根為多故除得之三真數亦為多也以多三真數與少五真數相乘得少十五真數以多三真數與三根相乘得多九根與實相減



恰盡無餘是為二根多三真數即所求之數也此法益因根少真數除平方少根少真數故以根除平方得根以根除多根（根原為少而減餘數變為多）得多真數且真數之位下對實中根位故定得數首位為根又因實數原為少而次位餘實之數變為多故定得數次位為多也如以數明之以根為五則一平方為二十五實數六平方得一百五十少一根得少五

少十五真數即少十五是為一百五十少五又少十五共為一百三十法數三根得十五少五真數即少五是為十五少五共為一十除之所得之一十即二根之數所得之多三即多三真數之數益一百三十以十除之得十三即十多三也

得數　一○——三
法　一五——五
實　一五○——五——一五
一五○——五○
○○○——四五——一五
——四五——一五
○○　○○

設如有九立方少十二平方少五根多六真數以三平方少二根少三真數除之問得幾何

得數			三根	二真數
法	三平方	二根	三真數	
實	九立方	二平方	五根	六真數
	九立方	六平方	九根	
	○	六平方	四根	六真數
		六平方	四根	六真數
		○	○	○

法以三平方少二根少三真數除九立方少十二平方少五根得三根以三根乘少三真數得少九根以三根乘少二根得少六平方以三根乘三平方得九立方與實相減立方恰盡原少十二平方減少六平方餘少六平方原少五根不能減九根轉減之餘多四根又多六真數復以三平方少二根少三真數除少六平方多四根多六真數得少二真

得數 三根 —— 二真數

法 三平方 —— 二根 —— 三真數

實 九立方 —— 二平方 —— 五根 —— 六真數

九立方 —— 六平方 —— 九根

○ —— 六平方 —— 四根 —— 六真數

—— 六平方 —— 四根 —— 六真數

○ ○ ○

數以少二真數乘少三真數得多六真數以少二真數乘少二根得多四根以少二真數乘三平方得少六平方與實相減恰盡無餘是為三根少二真數即所求之數也此法益因平方少根少真數除立方少平方少根與多真數故以平方除立方得根以平方除少平方得少真數且真數之位下對實中根位故定得數首位為根又實數之號雖有少

得數 二一——二

法 一四七————四————三

實三〇八七——五八八——五三——六

三〇八七——二九四——六三

〇〇〇〇——二九四——二八——六

——二九四——二八——六

〇〇〇 〇〇 〇

有多不同而次位餘實之首數為少故定得數次位為少也如以數明之以根為七則一平方為四十九一立方為三百四十三實數九立方得三千零八十七少十二平方得少五百八十八少五根得少三十五多六真數即多六是為三千零八十七少五百八十八又少三十五仍多六共為二千四百七十法數三平方得一百四十七少二根得少十

四少三真數即少三是為一百四十七少十四又少三共為一百三十除之所得之二十一即三根之數所得之少二即少二真數之數蓋二千四百七十以一百三十除之得十九即二十一少二也

得數 二——一——二

法 一四七——一四——三

實 三〇八七——五八八——三五⊥——六

三〇八七——二九四——六三

〇〇〇〇——二九四⊥——二八⊥——六

——二九四⊥——二八⊥——六

〇〇〇　〇〇　〇

設如有八立方多八平方多二根少四真數以二平方多三根多二真數除之問得幾何

法以二平方多三根多二真數除八立

四根——二真數 得數

法二平方—⊥—三根—⊥—二真數

實八立方—⊥—八平方—⊥—二根——四真數

八立方—⊥—二平方—⊥—八根

○——四平方——六根——四真數

——四平方——六根——四真數

○　○　○

方多八平方多二根得四根以四根乘多二真數得多八根以四根乘多三根得多十二平方以四根乘二平方得八立方與實相減立方恰盡平方與根之減數俱大於原數故皆轉減之餘少四平方少六根又少四真數復以二平方多三根多二真數除少四平方少六根少四眞數得少二真數以少二真數乘多二真數得少四真數以少二真數乘

得數 四根——二真數

法 二平方——三根——二真數

實 八立方——八平方——二根——四真數

八立方——二平方——八根

○——四平方——六根——四真數

——四平方——六根——四真數

○ ○ ○

多三根得少六根以少二真數乘二平方得少四平方與實相減恰盡無餘是為四根少二真數即所求之數也此法蓋因平方多根多真數除立方多平方多根與少真數故以平方除立方得根以平方除少平方平方原為多而減餘數變為少得少真數且真數之位下對實中根位故定得數首位為根又實數之號雖有多有少不同而次位餘實皆變為少故定得

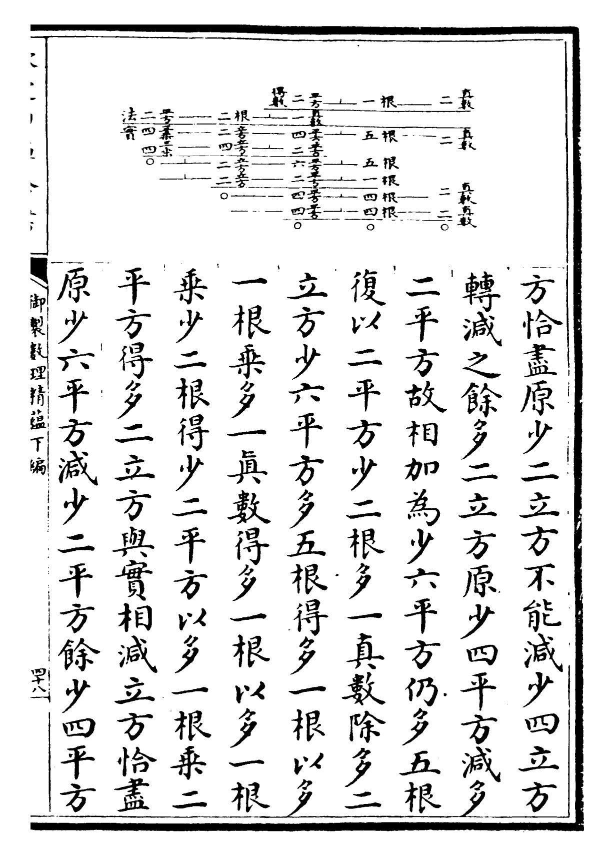
得數 一二——二
法 一八——丄——九——二
實 二一六——丄——七二——丄——六——四
二一六——丄——〇八——丄——二四
〇〇〇——三六——一八——四
——三六——一八——四
〇〇 〇〇 〇

數次位為少也如以數明之以根為三則一平方為九一立方為二十七實數八立方得二百一十六多八平方得多七十二多二根得多六少四真數即少四是二百一十六多七十二又多六仍少四共為二百九十法數二平方得十八多三根得多九多二真數即多二是十八多九又多二共為二十九除之所得十二即四根之數所得少二即少二

真數之數益二百九十以二十九除之得十即十二少二也

設如有四三乘方少二立方少四平方多五根少二真數以二平方少二根多一真數除之問得幾何

法以二平方少二根多一真數除四三乘方少二立方少四平方得二平方以二平方乘多一真數得多二平方以二平方乘少二根得少四立方以二平方乘二平方得四三乘方與實相減三乘



方恰盡原少二立方不能減少四立方轉減之餘多二立方原少四平方減多二平方故相加為少六平方仍多五根復以二平方少二根多一真數除多二立方少六平方多五根得多一根以多一根乘多一眞數得多一根以多一根乘少二根得少二平方以多一根乘二平方得多二立方與實相減立方恰盡原少六平方減少二平方餘少四平方

得數　二平方　一根　二真數
法　二平方　二根　一真數
實　四三乘方　二立方　四平方　五根　二真數
四立方　四平方　二平方　
○　二立方　六平方　五根
二平方　二平方　一根
○　四平方　四根　二真數
四平方　四根　二真數
○　○　○

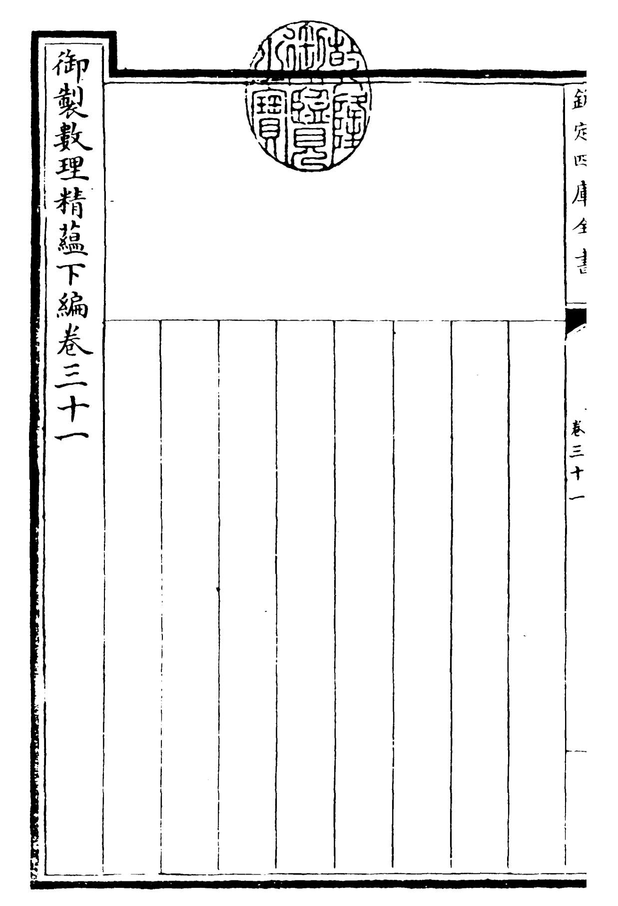
原多五根減多一根餘多四根仍少二真數又以二平方少二根多一真數除少四平方多四根少二真數得少二真數以少二真數乘多一真數得少二真數以少二真數乘少二根得多四根以少二真數乘二平方得少四平方與實相減恰盡無餘是為二平方多一根少二真數即所求之數也此法蓋因平方少根多真數除三乘方少立方又少平

方仍多根與少真數故以平方除三乘方得平方以平方除多立方立方原為少而減餘數變為多得多根以平方除少平方得少真數且真數之位下對實中平方之位故定得數首位為平方又實數之號雖有多有少不同而次位餘實之首數變為多三位餘實之首數仍為少故定得數之次位為多三位為少也如以數明之以根為六則一平方為三十六一立方

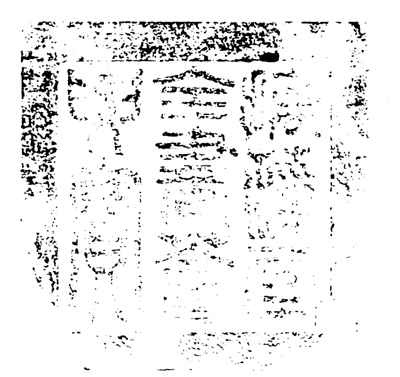
得數 七二——丄——六——二
法 七二——一二——丄——一
實 五一八四——四三二——四四—丄—三〇——二
五一八四——八六四——丄——七二
〇〇〇〇—丄—四三二——二一六—丄—三〇
—丄—四三二——七二—丄— 六
〇〇〇——一四四—丄—二四——二
——一四四—丄—二四——二
〇〇〇 〇〇 〇

為二百一十六一三乘方為一千二百九十六實數四三乘方得五千一百八十四少二立方得少四百三十二少四平方得少一百四十四多五根得多三十少二真數即少二是五千一百八十四少四百三十二又少一百四十四仍多三十復少二共為四千六百三十六法數二平方得七十二少二根得少十二多一真數即多一是七十二少十二

又多一共為六十一除之所得七十二即二平方之數所得多六即多一根之數所得少二即少二真數之數蓋四千六百三十六以六十一除之得七十六即七十二多六少二也



御製數理精蘊下編卷三十一



總校官庶吉士臣張能照

校對官中官正臣郭長發

謄録監生臣沈以顯

繪圖監生臣李　鈞